ÜBER EIN NEUES FIXPUNKTPRINZIP FÜR NICHTLINEARE VOLLSTETIGE PARAMETERABHÄNGIGE OPERATOREN IN BANACHRÄUMEN (Sept.69)

Inaugural-Dissertation

zur

Erlangung der Doktorwürde

der

Mathematisch-Naturwissenschaftlichen Fakultät

der Freien Universität Berlin

vorgelegt von

Rudolf Herbert Baierl

aus Reichenberg

1970

ÜBER EIN NEUES FIXPUNKTPRINZIP FÜR NICHTLINEARE VOLLSTETIGE PARAMETERABHÄNGIGE OPERATOREN IN BANACHRÄUMEN (Sept.69)

Inaugural-Dissertation

zur

Erlangung der Doktorwürde

der

Mathematisch-Naturwissenschaftlichen Fakultät

der Freien Universität Berlin

vorgelegt von

Rudolf Herbert Baierl

aus Reichenberg

1. Referent : Prof.Dr.Helmut Pachale
2. Referent : Prof.Dr.Alfred Stöhr

UNIV.
LEIDEN
BIBL.

Tag der mündlichen Prüfung : 13.7.70
Tag der Promotion :

I N D E X

I	Einleitung	1
II	Einführung	2
§1	Vollstetige Vektorfelder	2
§2	Fréchet-Ableitung vollstetiger Operatoren	2
§3	Vollstetige und punktweise vollstetige parameterabhängige Operatoren	3
§4	Homotopie und Fortsetzung singularitätenfreier vollstetiger Vektorfelder	4
III	Das Fixpunktprinzip	7
§1	Fixpunktgebiete	7
§2	Stetige Zweige von Fixpunkten	9
IV	Anwendung des Fixpunktprinzips	11
§1	Der Banachsche Fixpunktsatz	11
§2	Algebraische Gleichungen und Potenzreihen	13
§3	Ein Integraloperator	13
§4	Integralpotenzreihen	14

Digitized by the Internet Archive
in 2026

https://archive.org/details/IA41546510_0085

ÜBER EIN NEUES FIXPUNKTPRINZIP FÜR NICHTLINEARE VOLLSTETIGE PARAMETERABHÄNGIGE OPERATOREN IN BANACHRÄUMEN.

I.Einleitung

Das Fixpunktprinzip, das seinen Voraussetzungen nach zwischen dem Banachschen und dem Schauderschen steht, stellt für Kugeln aus dem Definitionsbereich des Parameters Gebiete ("Fixpunktgebiete") bereit, in denen der Operator zu jedem solchen Parameterwert einen Fixpunkt besitzt. In den dazu gehörenden Korollaren werden die Voraussetzungen zum Teil durch leichter überschaubare Forderungen ersetzt. Zusammenhangseigenschaften der Fixpunktmenge ("stetige Zweige", wie sie in M.A.Krasnoselskiis "Positive Solutions of Operator Equations",Woronesch 1960, behandelt werden,) werden in einem Zusatz bewiesen. Um die Parameterabhän - gigkeit der vorkommenden Operatoren möglichst allgemein zu halten, werde ich den Begriff der "punktweisen Vollstetigkeit" parameterabhängiger Operatoren einführen im Unter - schied zur Vollstetigkeit derselben, wie sie bei M.A.Krasnoselskii auftritt. Die Parameter werden aus metrischen bzw. linearen metrischen Räumen gewählt. Zum Zwecke der Übersichtlichkeit werde ich die Abhängigkeit der Operatoren statt durch Leerstellen: $A=A(\cdot,\cdot)$ mittels durchge - strichener Variablennamen kennzeichnen: $A=A(\varkappa,\mu)$ .Während also z.B. $A(\varkappa,\mu)$ ein Operator ist, ist $A(x,m)$ ein spezieller Wert desselben.

Um den Beweis des Fixpunktsatzes nicht zu überlasten, will ich einige Definitionen,Sätze und Lemmata voranstellen, die man im Wesentlichen etwa in der Publikation "Introduction to Topology of Functional Spaces" von A.Granas (Univ.of Chicago 1961 Math.Lect.Notes) findet, jedoch werde ich den dort unzureichend durchgeführten Beweis eines Homotopie-

Fortsetzungs-Theorems durch einen eigenen ersetzen, da jenes ein zentrales Hilfsmittel der vorliegenden Arbeit darstellt.
Nachdem das Fixpunktprinzip bewiesen ist, wird es zu - nächst auf eine bekannte Erweiterung des Banachschen Fixpunktsatzes angewendet. Um den Charakter des Prinzips zu verdeutlichen, soll dieses sodann für algebraische Gleichungen, Potenzreihen, einen speziellen Integraloperator und schließlich für Erhard Schmidtsche Integral - potenzreihen die Existenz von Lösungen bzw. Fixpunkten aufzeigen.

II. Einführung

§1 Vollstetige Vektorfelder.

DEF.1 Wie in der gesamten Arbeit sei mit E ein Banachraum bezeichnet. D sei eine Teilmenge aus E, und $F=F(*)$ sei ein vollstetiger Operator $F:D\longrightarrow E$ .Wenn mit I als Identität auf E für alle x aus D ein Operator f durch die Gleichung $f(x)=(I-F)(x)$ definiert ist, dann heißt $f=f(*)$ ein vollstetiges Vektorfeld auf D.

LEMMA 1 Ist X eine abgeschlossene und beschränkte Teilmenge aus D, so ist für ein auf D vollstetiges Vektorfeld $f(*)=(I-F)(*)$ die Menge f(X) aus E abgeschlossen. Eine Erweiterung dieses Lemmas wird im Beweis des Homotopie-Fortsetzungs-Theorems (Satz 3) gezeigt.

§2 Fréchet-Ableitung vollstetiger Operatoren

DEF.2 Es sei wieder D eine Teilmenge des Banachraumes E, und $A:D\longrightarrow E$ sei ein nichtlinearer Operator. Wenn es einen linearen Operator $A'_x:E\longrightarrow E$ gibt, so daß für alle h aus E, für welche x+h in D liegt (x ist aus D), eine Darstellung $A(x+h)-A(x)=A'_x(h)+o(x,h)\|h\|$ gilt, worin o(x,h) gegen Θ konvergiert, falls auch h gegen Θ konvergiert, so heißt A'_x starke Fréchet-Ableitung von A in x und A in x stark Fréchet-differenzierbar.

LEMMA 2 Ist der Operator A vollstetig, so sind dies auch die Operatoren A'_x .

§3 Vollstetige und punktweise vollstetige parameterabhängige Operatoren.

DEF.3 M sei Teilmenge eines metrischen Raumes V (Parameterraum), und D sei wieder Teilmenge eines Banachraumes E. Ein Operator $A=A(*,m):DxM \longrightarrow E$ heißt parameterabhängiger Operator. Liegt x in D und m in M, so ist also A(x,m) ein Element aus E und $A(*,m):D \longrightarrow E$ ein gewöhnlicher (nichtparameterabhängiger) Operator.

DEF.4 Der parameterabhängige Operator A(*,m) heiße punktweise vollstetig, wenn er für alle x aus D und m aus M stetig ist und für jedes m aus M der Operator A(*,m) vollstetig ist.

DEF.5 Der parameterabhängige Operator A(*,m) heißt vollstetig, wenn er punktweise vollstetig ist und seine Werte eine relativ kompakte Menge bilden, wenn x und m beschränkte Teilmengen D_o aus D und M_o aus M durchlaufen.

SATZ 1 A(*,m) sei ein punktweise vollstetiger parameterabhängiger Operator. Es sei M eine kompakte Menge, und $\sup_{x\in D} \|A(x,m_n)-A(x,m_o)\|$ konvergiere gegen 0, wenn (m_n) aus M gegen m_o aus M konvergieren.
Dann ist A(*,m) auf DxM ein vollstetiger parameterabhängiger Operator.

Beweis: Sei (x_n,m_n) eine Folge aus DxM. Da M kompakt ist, konvergiere o.B.d.A.(ohne Beschränkung der Allgemeinheit) (m_n) gegen m_o aus M, und weil der Operator $A(*,m_o)$ vollstetig ist, konvergiere $A(x_n,m_o)$ o.B.d.A. gegen y aus E . Aufgrund der Voraussetzung und der Ungleichung $\|A(x_n,m_n)-y\| \leq \|A(x_n,m_n)-A(x_n,m_o)\|+\|A(x_n,m_o)-y\|$ ergibt sich, daß $A(x_n,m_n)$ gegen y konvergiert, womit die Vollstetigkeit des parameterabhängigen Operators A(*,m) auf DxM gezeigt ist,

Speziell ergibt sich aus Satz 1 die Feststellung, daß für parameterabhängige Operatoren, deren Parameterraum die reellen oder komplexen Zahlen sind, die punktweise Vollstetigkeit mit der Vollstetigkeit zusammenfällt.

§4 Homotopie und Fortsetzung singularitätenfreier vollstetiger Vektorfelder

SATZ 2 Die Teilmengen X_o und X aus E seien abgeschlossen und beschränkt, X_o Teilmenge von X und der Operator $F:X_o \longrightarrow E$ vollstetig.
Dann kann $F(*)$ über X fortgesetzt werden zu einem voll - stetigen Operator $F:X \longrightarrow CONV(F(X_o))$. Dabei bedeutet der Ausdruck $CONV(F(X_o))$ den Abschluß der konvexen Hülle der rel. kompakten Menge $F(X_o)$.
Der Beweis dieses Satzes wird bei A.Granas (s.I.) auf ein Fortsetzungs-Theorem für Funktionale (von Tietze) zurückgeführt.

DEF.6 Es sei F ein vollstetiger Operator von D in E und $f=f(*)=(I-F)(*)$ ein vollstetiges Vektorfeld. Wenn $f(x)\neq\Theta$ für alle x aus D ist oder gleichbedeutend damit F in D keine Fixpunkte hat, dann heißt f ein vollstetiges singularitätenfreies Vektorfeld auf D.

DEF.7 $f(*)=(I-F)(*)$ und $g(*)=(I-G)(*)$ seien vollstetige singularitätenfreie Vektorfelder auf D. Dann heißen f und g zueinander homotop (in Zeichen: $f \tilde{D} g$) auf D, wenn es einen auf $D \times [0,1]$ vollstetigen parameterabhängigen Operator $H(*,m)$ gibt derart, daß $h(x,m)=x-H(x,m)\neq\Theta$, $h(x,0)=f(x)$ und $h(x,1)=g(x)$ für alle x aus D und m aus $[0,1]$.

SATZ 3 (Homotopie-Fortsetzungs-Theorem)

VOR. X_o und X seien abgeschlossene und beschränkte Teilmengen des Banachraumes E und X_o Teilmenge von X. Die vollstetigen singularitätenfreien Vektorfelder f_o und g_o auf X_o seien zueinander homotop: $f_o \overset{\sim}{X_o} g_o$, und es existiere eine vollstetige singularitätenfreie Fortsetzung f von f_o über X.

BEH. Dann gibt es auch eine vollstetige singularitätenfreie Fortsetzung g von g_o über X und zwar so, daß f und g auf X zueinander singularitätenfrei homotop sind.

BEW. Da g_o und f_o auf X_o singularitätenfrei und zueinander homotop sind, gibt es ein auf $Y=X_o \times J$ $(J=[0,1])$ vollstetiges Vektorfeld $h=h(*,m):Y \longrightarrow E$, definiert durch $h(x,m)= x-H(x,m)$ für (x,m) aus Y, mit den Eigenschaften

$h(x,1)=g_o(x)$, $h(x,0)=f_o(x)$ und $h(x,m)\neq\Theta$ für alle x aus X_o und alle m aus J. Da $h(*,m)$ ein auf Y vollstetiges Vektorfeld ist und Y eine abgeschlossene und beschränkte Menge, ist die Menge $h(Y)=h(X_o,J)$ abgeschlossen: denn sei (x_n) aus X_o, (m_n) aus J, und es konvergiere $h(x_n,m_n)$ gegen y_o. Zu zeigen ist, daß y_o in h(Y) liegt. Da $H(*,m)$ auf Y vollstetig ist, konvergiere o.B.d.A. $H(x_n,m_n)$ gegen y_1 , ferner o.B.d.A. m_n gegen m_o, dann konvergiert x_n gegen $y_o+y_1=z$, welches wegen der Abgeschlossenheit von X_o in X_o liegt. Wegen der Stetigkeit von $h(*,m)$ gilt also: $h(x_n,m_n)$ konvergiert gegen $y_o+y_1-y_1=y_o$, und ebenso gegen $h(z,m_o)$. Daher liegt y_o in h(Y).

Weil h(Y) abgeschlossen ist und $h(x,m)\neq\Theta$ für alle (x,m) aus Y, gibt es eine Zahl $d>0$ mit der Eigenschaft, daß für alle (x,m) aus Y $\|h(x,m)\|\geq d>0$ ist.

Nach Voraussetzung ist f Fortsetzung von f_o über X, und es ist $f(x)\neq\Theta$ für alle x aus X. Da (LEMMA 1) die Menge f(X) abgeschlossen ist, gibt es eine Zahl $d_o>0$ mit der Eigenschaft: $\|f(x)\|\geq d_o>0$ für alle x aus X.

Sei $Y_o=X\times\{0\}$ und $h_o(x,m)=_{df}\begin{cases}h(x,m) & \text{, wenn (x,m) aus Y}\\ f(x) & \text{, wenn (x,m) aus } Y_o\end{cases}$

Dann gilt mit $d_1=\min(d,d_o)$: $\|h_o(x,m)\|\geq d_1>0$ für alle (x,m) aus der Vereinigung $Y\cup Y_o$. Der Operator $H_o(*,m)$ kann (SATZ2) über XxI fortgesetzt werden zu einem vollstetigen Operator $H_1(*,m)$; also kann $h_o(*,m)= I(*)-H_o(*,m)$ von $Y\cup Y_o$ über XxJ fortgesetzt werden zu einem vollstetigen Vektorfeld $h_1(*,m)$. Es gibt eine Zahl $e>0$, so daß für alle m aus J und alle x aus X mit dem Abstand $d(x,X_o)<2e$ für eine gewisse Zahl $a>0$ $\|h_1(x,m)\|\geq a>0$ ist. Wäre das nicht der Fall, so gäbe es eine Folge (x_n,m_n) aus XxI , so daß $h_1(x_n,m_n)$ gegen Θ und $d(x_n,X_o)$ gegen 0 konvergierte. Da $H_1(*,m)=I(*)-h_1(*,m)$ vollstetig ist, konvergiere o.B.d.A. $H_1(x_n,m_n)$ gegen y_1, ferner m_n gegen m_1. Dann konvergiert x_n gegen y_1 und $H(x_n, m_n)$ gegen $H(y_1,m_1)$, also gilt $h(y_1,m_1)=\Theta$. Da X_o abgeschlossen ist, liegt y_1 in X_o.

Dann gilt $h_1(y_1,m_1)=h_o(y_1,m_1)=h(y_1,m_1)=\Theta$ im Widerspruch zur Voraussetzung. Man definiere sodann für alle x aus X

$$g(x) =_{df} \begin{cases} h_1(x,1-(d(x,X_o)/e)) & \text{, wenn } 0\leq d(x,X_o)\leq e \\ f(x) & \text{, wenn } d(x,X_o)\geq e \end{cases} .$$

$g(*)$ ist dann eine Fortsetzung von $g_o(*)$ über X und ein auf X vollstetiges singularitätenfreies zu $f(*)$ homotopes Vektorfeld. Die Homotopie wird geliefert durch

$$h_2(x,m) =_{df} \begin{cases} h_1(x,m(1-(d(x,X_o)/e))) & \text{,wenn } 0\leq d(x,X_o)\leq e \\ f(x) & \text{,wenn } d(x,X_o)\geq e \end{cases}$$

für alle (x,m) aus XxJ. Damit ist der Beweis des Satzes vollständig erbracht.

DEF.8 X und Y seien Teilmengen des Banachraumes E und $f=f(*)$ ein singularitätenfreies vollstetiges Vektorfeld auf X. Y heißt unwesentlich für f, wenn es eine auf der Vereinigung XvY singularitätenfreie vollstetige Fortsetzung f_1 von f gibt. Andernfalls heißt Y wesentlich für f.

Die folgenden drei Sätze über Wesentlichkeit und Homotopie findet man bei A.Granas bewiesen (s.I.).

SATZ 4 X sei eine beschränkte und abgeschlossene Teilmenge aus E, x_o aus E-X und $f(x)\overset{=}{df}x-x_o$ für alle x aus X. $f=f(*)$ ist dann ein vollstetiges singularitätenfreies Vektorfeld auf X, und eine Zusammenhangskomponente U aus E-X ist für f genau dann wesentlich, wenn x_o in U liegt.

SATZ 5 Sei wieder X eine abgeschlossene und beschränkte Teilmenge aus E und darauf das vollstetige Vektorfeld $f=f(*)$ singularitätenfrei. Weiter sei für ein $e>0$ der Abstand der Menge f(X) von der Null Θ: $d(f(X),\Theta)>e$. (s.LEMMA 1). Wenn $g=g(*)$ auf X ein vollstetiges und singularitätenfreies Vektorfeld ist, das für alle x aus X die Ungleichung $\|f(x)-g(x)\|<e$ erfüllt, dann sind f und g auf X zueinander homotop.

SATZ 6 Die Voraussetzungen seien wie in SATZ 5, nur die dortigen Ungleichungen seien ersetzt durch : $\|f(x)-g(x)\|\leq\|f(x)\|$ für alle x aus X, dann sind f und g auf X zueinander homotop: $f\underset{X}{\sim}g$.

III. Das Fixpunktprinzip

§1 Fixpunktgebiete

DEF. 1 Im Folgenden sei M Teilmenge eines metrischen Raumes V, welche eine Kugel $K=K(m_0;r)$ mit dem Radius $r>0$ um m_0 aus V enthält. D sei Teilmenge eines Banachraumes E und $A=A(*,m):DxM\longrightarrow E$ ein punktweise vollstetiger parameterabhängiger Operator, für den ein Element x_0 aus einem beschränkten Gebiet G aus D existiert, so daß $A(x_0,m_0)=x_0$ ist. Es gebe um m_0 in K eine Kugel $J=J(m_0;e)$ mit dem Radius $e>0$ derart, daß es für jedes m aus J ein x aus G gibt, für das $A(x,m)=x$ ist. Dann heiße G ein Fixpunktgebiet des Operators $A(*,m)$ um x_0 .

DEF.2 x_0 sei Fixpunkt des Operators $A(*,m_0)$: $A(x_0,m_0)=x_0$. Wenn es eine Umgebung $U=U(x_0)$ des Punktes x_0 in D derart gibt, daß der Operator $A(*,m_0)$ in U keinen weiteren Fixpunkt hat, dann heißt x_0 in der Umgebung U isolierter Fixpunkt von $A(*,m_0)$.

SATZ 1 (Satz über Fixpunktgebiete)

VOR. Wie in den obigen Definitionen sei $A(*,m):DxM\longrightarrow E$ ein punktweise vollstetiger parameterabhängiger Operator und $x_0=A(x_0,m_0)$ ein in der Umgebung U isolierter Fixpunkt von $A(*,m_0)$. In U konvergiere $\sup_{x\in U}\|A(x,m_n)-A(x,m_0)\|$ gegen 0, wenn m_n gegen m_0 konvergiert, und es sei dort zudem noch eine der beiden folgenden Ungleichungen erfüllt:

(i) $\|A(x,m_0)-x_0\|\leq\|x-x_0\|$ für alle x aus U oder:

(ii) $\|A(x,m_0)-x_0\|\leq\|A(x,m_0)-x\|$ für alle x aus U.

BEH. Jedes Gebiet G, in dem x_0 liegt, und dessen Abschluß Teilmenge von U ist, ist Fixpunktgebiet des Operators $A(*,m)$ um x_0 .

BEW. Es sei G ein beliebiges Gebiet, dessen Abschluß $\overline{G}$ = GvdG (Vereinigung des Gebietes G mit seinem Rand dG) in U liegt und in dem x_0 liegt. Dann ist für alle x aus dG $A(x,m_0)\neq x$ und sogar $\|A(x,m_0)-x\|\geq a>0$ für eine gewisse feste Zahl a, weil $A(*,m_0)$ vollstetig und dG abgeschlossen ist (II.LEMMA 1). Sei $f_1(x) \overline{df}\ x-A(x,m_0)$ und

$f_o(x) \overset{df}{=} x-x_o$ für alle x aus U. Dann folgt aus (i) bzw. (ii) die Gültigkeit der Ungleichungen $\|f_1(x)-f_o(x)\| \leq \|f_o(x)\|$ bzw. $\|f_1(x)-f_o(x)\| \leq \|f_1(x)\|$ für alle x aus dG. Da auf dG zudem noch $f_o(x) \neq \Theta$ und $f_1(x) \neq \Theta$ ist, sind die auf dG vollstetigen und singularitätenfreien Vektorfelder $f_o(*)$ und $f_1(*)$ zueinander homotop: $f_o \overset{\sim}{dG} f_1$ (II.SATZ 6). Da G für f_o wesentlich ist (II.SATZ 4), ist G dann auch für f_1 wesentlich (II.SATZ 3). Aufgrund der Konvergenzbedingung in der Voraussetzung gibt es mit positivem Radius e eine Kugel $J=J(m_o;e)$ um m_o, so daß für alle m aus J und alle x aus U, also auch für alle x aus dGvG die Unglei - chung $\|A(x,m_o)-A(x,m)\| \leq a/2$ gilt. Deshalb sind für alle m aus J die Felder f_o und $f_m(*) \overset{df}{=} I(*)-A(*,m)$, wobei I der identische Operator sein soll, auf dG zueinander homotop (II.SATZ 5) und G also wesentlich für alle Felder f_m (II.SATZ 3). Daraus folgt aber gerade, daß G ein Fixpunktgebiet des Operators $A(*,m)$ um x_o ist, und der Satz ist damit bewiesen.

Unmittelbar aus der Beweisführung ergibt sich die folgende Aussage über das Verhalten der Fixpunktmenge des Operators $A(*,m)$ in der Nähe des vorgegebenen Fixpunktes x_o:

KOROLLAR 1.1 Die Voraussetzungen von SATZ 1 seien erfüllt und (m_n) eine gegen m_o konvergente Folge aus M. Dann gibt es eine natürliche Zahl n_o mit der Eigenschaft, daß für alle natürlichen $n \geq n_o$ Fixpunkte $x_n=A(x_n,m_n)$ existieren mit $\lim_{n\to\infty}(x_n)=x_o$.

In den beiden nun folgenden Korollaren sollen die Voraussetzungen zu SATZ 1 durch zumTeil leichter überschaubare ersetzt werden.

KOR.1.2 VOR. Wie in SATZ 1 sei $A(*,m)$ ein punktweise vollstetiger parameterabhängiger Operator. Es sei $A(x_o,m_o)=x_o$, und der Operator $A(*,m_o)$ besitze in x_o die starke Fréchet-Ableitung B mit der Norm $\|B\|<1$. U sei wieder eine Umgebung von x_o , in der die Konvergenzbedingung aus SATZ 1 erfüllt ist.

BEH. wie in SATZ 1

BEW. Zunächst zeige ich, daß aus der Existenz der Fréchet-Ableitung B mit $\|B\|<1$ die Bedingung (i) aus SATZ 1 folgt mit einer evtl. kleineren Umgebung U_o, die dann wieder U genannt werde. Angenommen, dies sei nicht der Fall, dann gibtes eine gegen x_o konvergente Folge (x_n) derart, daß für alle natürlichen n die Ungleichung $\|A(x_n,m_o)-x_o\| > \|x_n-x_o\|$ gilt. Da B eine starke Fréchet-Ableitung des Operators $A(*,m_o)$ ist, gilt mit $h_n=x_n-x_o$:
$A(x_n,m_o)-A(x_o,m_o) = A(x_o+h_n,m_o)-A(x_o,m_o) = B(h_n)+o_n\|h_n\|$, wobei mit h_n gegen Θ auch o_n gegen Θ konvergiert.
Da also dann $A(x_n,m_o)-x_o = B(h_n)+o_n\|h_n\|$ und daher $\|B(h_n)+o_n\|h_n\|\| > \|x_n-x_o\| = \|h_n\|$ ist, gilt mit $j_n=h_n/\|h_n\|$: $\|B(j_n)+o_n\| > \|j_n\|=1$. Weil der Operator B vollstetig ist (II.LEMMA 2), die Einheitssphäre abgeschlossen und beschränkt in E, konvergiere o.B.d.A. $Bj_n=B(j_n)$ gegen Bj_o mit $\|j_o\|=1$. Da o_n gegen Θ konvergiert, muß $\|Bj_o\| \geq 1$ und $\|B\| \geq 1$ sein im Widerspruch zur Voraussetzung.
Es bleibt noch zu zeigen, daß x_o ein isolierter Fixpunkt des Operators $A(*,m_o)$ ist. Wäre dies nicht so, dann gäbe es eine gegen x_o konvergente Folge von Fixpunkten x_n des Operators $A(*,m_o)$. Mit $h_n=x_n-x_o \neq \Theta$ gilt dann für alle natürlichen Zahlen $n \geq n_o$, für die $(\|B\|+\|o_n\|)<1$ ist, :
$\|A(x_n,m_o)-A(x_o,m_o)\| = \|x_n-x_o\| = \|B(h_n)+o_n\|h_n\|\| = (\|B\|+\|o_n\|)\|h_n\| < \|h_n\| = \|x_n-x_o\|$ im Widerspruch zur Voraussetzung $h_n \neq \Theta$.
Weil o_n gegen Θ konvergiert gibt es in der Tat eine natürliche Zahl n_o mit dieser Eigenschaft. Damit ist die Isoliertheit des Fixpunktes x_o von $A(*,m_o)$ nachgewiesen. Da nun die Voraussetzungen von SATZ 1 sämtlich erfüllt sind, ist das Korollar bewiesen.

KOR.1.3 VOR. Die Voraussetzungen von KOR.1.2 seien erfüllt bis auf die Existenz der Fréchet-Ableitung. An ihrer Stelle sei die Ungleichung $\|x-x_o\| > \|A(x,m_o)-x_o\|$ für alle x aus U erfüllt.

BEH. wie SATZ 1

BEW. Zu zeigen ist nur, daß x_o ein isolierter Fixpunkt von $A(*,m_o)$ ist. Angenommen, dies sei nicht so, dann gibt es eine gegen x_o konvergente Folge $x_n=A(x_n,m_o)$ derart, daß für alle natürlichen Zahlen n $x_n \neq x_o$ ist. Im Widerspruch zur Voraussetzung ist dann in jeder Umgebung von x_o die Gleichung $\|A(x,m_o)-x_o\| = \|x-x_o\|$ für mindest ein $x \neq x_o$ erfüllt. Damit ist KOR.1.3 bewiesen.

§2 Stetige Zweige von Fixpunkten

DEF.3 X_1 , X_2 und X seien Teilmengen des Banachraumes E, und X_1 sei abgeschlossen und beschränkt. Es gelte: Es gibt kein Gebiet G aus E, das X_1 umfaßt, mit X_2 einen leeren Durchschnitt hat und, dessen Rand dG mit X einen leeren Durchschnitt bildet: $X_1 \subset G$, $dG \cap X=\emptyset$ und $G \cap X_2=\emptyset$ für kein Gebiet G aus E. Dann heißt X ein stetiger Zweig, der X_1 mit X_2 verbindet.

Der folgende Satz untersucht die in SATZ 1 bereitgestellte Fixpunktmenge eines punktweise vollstetigen parameterabhängigen Operators $A(*,m)$ auf die in DEF.3 erklärte Zusammenhangseigenschaft.

SATZ 2 (Zusatz über stetige Zweige von Fixpunkten)

VOR. Die Voraussetzungen von SATZ 1, KOR.1.2 oder KOR.1.3 seien erfüllt,und zusätzlich sei der Parameterraum V, aus dem M gewählt wird, ein konvexer Raum. G sei eines der in SATZ 1 sichergestellten Fixpunktgebiete derart, daß $A(*,m)$ für jedes m aus $J=J(m_o;e)$ einen Fixpunkt in G hat, und L sei eine in J gelegene konvexe Umgebung von m_o. Sei m_1 ein beliebiger aber fester Punkt aus L, X die Menge der Fixpunkte der Operatoren $A(*,m)$, wenn m aus L gewählt wird, X_o die Fixpunktmenge des Operators $A(*,m_o)$ und X_1 diejenige des Operators $A(*,m_1)$, soweit die jeweiligen Fixpunkte in GvdG liegen.

BEH. X ist ein stetiger Zweig, der X_o mit X_1 verbindet.

BEW. Angenommen es existierte ein Gebiet Q mit den Eigenschaften: Q umfaßt die Menge X_o , Q habe mit X_1 einen leeren Durchschnitt,und der Schnitt des Randes dQ

mit der Menge X sei leer. Q liege o.B.d.A. in G, welches wiederum in der den Voraussetzungen von SATZ 1 genügenden Umgebung U von x_o liegt. Da die Menge X_o, die aus dem einen Element x_o gebildet wird, in Q liegt, kann man die Wesentlichkeit von Q für das auf dQ singularitätenfreie vollstetige Vektorfeld $f_{mo}(*)=I(*)-A(*,m_o)$ wie in SATZ 1 zeigen. Da der Schnitt $X \cap dQ$ leer ist, also $A(x,m) \neq x$ und $f_m(x) \overset{df}{=} x-A(x,m) \neq \Theta$ für alle x aus dQ und alle m aus L, ist für jedes m aus L f_m ein vollstetiges singularitätenfreies Vektorfeld auf dQ. Weil nun $h(*,t)$, welches für alle x aus dQ und alle t aus $[0,1]$ durch $h(x,t) \overset{df}{=} x-A(x,tm_o+(1-t)m_1)$ definiert ist, eine singularitätenfreie Homotopie auf dQ zwischen den auf dQ singularitätenfreien vollstetigen Vektorfeldern f_{mo} und $f_{m1}(*)=I(*) - A(*,m_1)$ und Q für f_{mo} wesentlich ist, ist Q auch für f_{m1} wesentlich. Dies steht im Widerspruch zu der Annahme, daß $Q \cap X_1 = \emptyset$ sei. Damit ist der Satz bewiesen.
(Bemerkung: $h(*,t)$ ist nach II, SATZ 1 vollstetig)

IV. Anwendung des Fixpunktprinzips

§1 Der Banachsche Fixpunktsatz.

SATZ 1 (Banachscher Fixpunktsatz)

VOR. M sei eine überdeckungskompakte Teilmenge des metrischen Parameterraumes V, D eine Teilmenge des Banachraumes E und $A(*,*):DxM \longrightarrow E$ ein punktweise vollstetiger parameterabhängiger Operator, für den die Iteration $x_{n+1}=A(x_n,m)$ mit einem beliebigen Anfangselement x_o und einem beliebigen aber festen m aus M nicht aus D herausführt, und es gebe für jedes m aus M eine Zahl q_m mit der Eigenschaft $0 \leq q_m \leq q < 1$, so daß für beliebige x_1 und x_2 aus D die Ungleichung $\|A(x_1,m)-A(x_2,m)\| \leq q_m \|x_1-x_2\|$ gilt.

BEH. Für jedes m aus M existiert genau ein x_m in D derart, daß $A(x_m,m)=x_m=x(m)$ ist, falls D vollständig.

BEW. Bekanntlich liefert iteratives Anwenden des Operators $A(*,m)$ auf ein beliebiges Anfangselement aus D für jedes m aus M Existenz und Eindeutigkeit des Fixpunktes x_m.

Die Eindeutigkeit der durch den Banachschen Fixpunktsatz konstruierten Fixpunkte führt in Verbindung mit KOR.1.3 auf die folgende Aussage über die Fixpunktmenge des Operators $A(*,m)$.

SATZ 1.1 VOR. Die Voraussetzungen von SATZ 1 seien erfüllt. Für jede beschränkte Menge X aus D und jedes m_i aus M konvergiere $\sup_{x\in X}\|A(x,m_n)-A(x,m_i)\|$ gegen 0, wenn (m_n) aus M gegen m_i konvergiert.

BEH. Die Fixpunktmenge des Operators $A(*,m)$ stellt einen stetigen Operator $x(m):\underline{M}\longrightarrow D$ dar, wenn m auf dem Inneren (Kern) $\underline{M}$ von M variiert.

BEW. Da zu jedem m_i aus M genau ein Fixpunkt des Operators $A(*,m_i)$ existiert, so ist dieser trivialerweise isolierter Fixpunkt von $A(*,m_i)$. Da für alle x aus D die Ungleichung $\|A(x,m_i)-A(x_i,m_i)\|=\|A(x,m_i)-x_i\|\leq q_i\|x-x_i\|<$ $<\|x-x_i\|$ gilt, sind die Voraussetzungen von SATZ 1 aus III. für jedes Paar (x_i, m_i) gegeben. Es gibt also um m_i eine Kugel $J(m_i;e_i)$ mit einem positiven Radius e_i derart, daß die Gleichung $A(x,m)=x$ für alle m aus $J(m_i;e_i)$ nur in einem beschränkten Gebiet G_i Lösungen x_m hat. Da dies für alle m_i aus M gilt, endlich viele der Kugeln $J(m_i;e_i)$ aber schon M überdecken, ist die Lösungsmenge der Gleichung $A(x,m)=x$ für m aus M beschränkt in D. $x(m)$ ist auf M also ein beschränkter Operator, dh.: das Bild von M unter $x(m)$ ist in D beschränkt. Sei nun $x_i=A(x_i,m_i)$ wieder ein beliebiger Punkt der Fixpunktmenge und (m_n) aus M eine gegen m_i konvergente Folge mit $x(m_n)=x_n=A(x_n,m_n)$, dann konvergiert $r_n=\|A(x_n,m_n)-A(x_n,m_i)\|$ gegen 0, weil die Folge (x_n) beschränkt ist. Da die Ungleichung $\|x_n-x_i\|=\|A(x_n,m_n)-A(x_i,m_i)\|\leq r_n+\|A(x_n,m_i)-A(x_i,m_i)\|\leq r_n+$ $+q_i\|x_n-x_i\|$ besteht und $1-q_i\geq 1-q>0$ ist, folgt aus der Ungleichung $(1-q_i)\|x_n-x_i\|\leq r_n$, daß (x_n) gegen x_i konvergiert; also ist $x(m)$ in m_i stetig und, da m_i aus M beliebig war, die Behauptung bewiesen.

§2 Algebraische Gleichungen und Potenzreihen.

Für algebraische Gleichungen und die Auflösung von Potenzreihen ist das Fixpunktprinzip zwar wertlos, jedoch kann eine Anwendung desselben auf diese Probleme seinen Charakter selbst erhellen.

E sei der Raum der reellen bzw komplexen Zahlen. Der Operator $A(*,*):ExE \longrightarrow E$ sei für alle x und m aus E definiert durch $A(x,m) = P_n(x)m^n+P_{n-1}(x)m^{n-1}+\ldots+P_1(x)m+P_0(x)$, worin die $P_i(*)$ Polynome in * mit Koeffizienten aus E sind und $P_0(*)$ nur Potenzen in * mit einem Grad ≥ 2 enthält. Für $(x_0,m_0)=(0,0)$ sind dann die Voraussetzungen von SATZ 1 aus III. erfüllt. Es gibt danach also Zahlen $e>0$ und $d>0$, so daß die Gleichung $A(x,m)=x$ für jedes m aus $J=\{m, |m|<e\}$ Lösungen x aus $G=\{x, |x|<d\}$ hat. Ist X_1 die Lösungsmenge der Gleichung $A(x,m_1)=x$, worin m_1 aus J beliebig gewählt werden kann, und X die Lösungsmenge von $A(x,m)=x$ für m aus J und x aus G, so ist X ein stetiger Zweig, der $\{0\}=X_0$ mit X_1 verbindet.

Seien nun $P_n(*)$ Potenzreihen in *, $P_0(*)$ eine solche, die nur *-Potenzen höher als 1. Grades enthält und $\sum_{n=0}^{\infty} P_n(x)m^n = A(x,m)$ für $|m|<e_1$ und $|x|<d_1$ absolut konvergent, so lassen sich die obigen Feststellunge wörtlich wiederholen.

§3 Ein Integraloperator.

Es sei $K(*,*)$ ein Dreieckskern: $K(s,t)=(2/\pi)\sum_{n=1}^{\infty}\sin(ns)\sin(nt)/n^2$, für s und t aus $[0,\pi]$, $E=C[0,\pi]$ und der Operator $A(*,*)$ für alle x aus E und alle m aus V (Menge der reellen oder der komplexen Zahlen) erklärt durch die Gleichung

$$A(x,m)=A(x(\vartheta),m)\overset{df}{=}m\int_0 K(\vartheta,t)(\sin(x(t))+mt)^n dt$$

mit einer beliebigen, aber festen natürlichen Zahl n .

Löst für ein $m_1\neq 0$ ein x_1 aus E die Gleichung $A(x,m_1)=x$, so ist wegen $\int_0 K(\vartheta,t)t^n dt \neq 0$ sicherlich $x_1\neq 0$.

Für jedes m bildet der Operator $A(*,m)$ E auf eine gleichmäßig beschränkte und gleichgradig stetige Funktionen -

menge ab, ist also vollstetig. Der Operator $A(*,m)$ ist daher punktweise vollstetig. Mit $x_o=\Theta$ und $m_o=0$ sind für $A(*,m)$ die Voraussetzungen von III.KOR.1.3 gegeben. Deshalb gibt es nach III.SATZ 1 Zahlen $d>0$ und $e>0$, so daß der Operator $A(*,m)$ für alle m aus $J=\{m, |m|<e\}$ Fixpunkte in $G=\{x, \|x\|<d\}$ aus E hat. Ist (m_n) eine Nullfolge aus J, so gibt es nach III.KOR.1.1 eine gegen Θ konvergente Folge aus G, deren Glieder Fixpunkte des Operators $A(*,m)$ sind: $x_n=A(x_n,m_n)$ konvergiert gegen Θ, und nach der obigen Bemerkung ist mit $m_n\neq 0$ auch $x_n\neq\Theta$.
Sei $X_o=\{\Theta\}$, X die Fixpunktmenge von $A(*,m)$, wenn m J durchläuft und X_1 die Fixpunktmenge des Operators $A(*,m_1)$, wenn m_1 aus J beliebig, aber fest gewählt wird. Nach III.SATZ 2 ist dann X ein stetiger Zweig, der X_o mit X_1 verbindet.
Ist in dem Operator $A(*,m)$ n=1 (s.o.), dann erfüllt A die Voraussetzungen des Banachschen Satzes SATZ 1.1, und die Fixpunktmenge von $A(*,m)$ definiert einen stetigen Operator $x(m):J\longrightarrow E$ bzw. eine auf $Jx[0,\pi]$ stetige Funktion $x(\vartheta,m)$. (Bemerkung: Man wähle z.B. q=1/4 .)

§4 Integralpotenzreihen

1.) Sei $E=C[0,1]$ und V der reelle oder komplexe Zahlenraum. P_n sei ein Integralpotenzgliedoperator vom Grade n, für alle x aus E definiert durch:

$$P_n(x) \overset{df}{=} \int_0^1 \cdots \int_0^1 K(s,t_1,\ldots,t_r)x(t_1)^{a_1}\cdots x(t_r)^{a_r}dt_1\ldots dt_r$$

worin K stetig sein soll für $0\leq s\leq 1$ und $0\leq t_i\leq 1$, die a_i natürliche Zahlen sind für $i=1,\ldots,r$ und $a_1+\ldots+a_r=n$ ist. $P_n(*)$ ist ein vollstetiger Operator auf E. $T_n=T_n(*)$ sei eine endliche Summe von Integralpotenzgliedoperatoren n-ten Grades, wobei in natürlicher Weise $P_{n1}(*)+P_{n2}(*)=(P_{n1}+P_{n2})(*)$ definiert wird, dann heißt T_n Integralpotenzformoperator vom Grade n. Für alle n gebe es eine positive Konstante c, so daß die gegebenen Integralpotenzform-Operatoren T_n für alle x aus E die Ungleichung

$\|T_n(x)\| = c^n \|x\|^n$ erfüllen. $T(*,m)$ sei ein Integraloperator, der den Voraussetzungen von III.SATZ 1 genügt für $(x_o,m_o)=(\Theta,0)$ und für den in einer hinreichend kleinen Umgebung von $m_o=0$ für alle $m\neq 0$ $T(\Theta,m)\neq\Theta$ ist.(Der Operator $A(*,m)$ aus §3 ist z.B. ein solcher). Für jede natürliche Zahl n sei ein Operator $A_n(*,m)$ definiert durch :

$A_n(*,m) \overset{df}{=} T(*,m) + mT_1(*) + \ldots + m^n T_n(*)$ für alle m aus V.

Die $A_n(*,m)$ sind punktweise vollstetig. Sei $D=\{x,\|x\|<1/c\}$ und $M=\{m,|m|<1\}$, dann konvergieren die A_n gegen einen auf DxM punktweise vollstetigen parameterabhängigen Operator $A(*,m)$. $A(*,m)$ erfüllt wieder die Voraussetzungen von III.SATZ 1 und SATZ 5. Die entsprechenden Folgerungen lassen sich wie in §3 formulieren. Auch hier ist also ein stetiger Zweig von Fixpunkten gesichert.

2.) Sei E wieder wie in 1.) , weiter aber auch V=E .

$T(*,y):DxM\longrightarrow E$ sei ein Operator, der mit $(x_o,m_o)=(x_o,y_o)=(\Theta,\Theta)$ den Voraussetzungen von SATZ 1 aus III. genügt,oder,wenn man triviale Lösungen ausschließen will, zudem für alle $y\neq\Theta$ aus einer hinreichen kleinen Umgebung von $y_o=\Theta$ $T(\Theta,y)\neq\Theta$ erfüllt, wobei D und E Kugeln um Θ enthalten sollen. $P(*,y)$ sei ein punktweise vollstetiger Operator, der die Konvergenzbedingung aus III.SATZ 1 erfüllt und für den $P(\Theta,y)=P(x,\Theta)=\Theta$ für alle x und y ist. Dann erfüllt der Operator $A(*,y)=T(*,y)+P(*,y)$ die Voraussetzungen der Sätze 1 und 2 aus III. . Sei etwa: $T(x,y)= y\int K(s,t)(\sin(x(t))+y(t))^n dt$ für ein beliebiges aber festes natürliches n und $P(*,y)$ eine Erhard-Schmidtsche-Integralpotenzreihe bzw. der durch sie dargestellte Operator mit den folgenden Eigenschaften : $P(*,y)$ enthalte nur Integralpotenzformen, die sowohl in $*$ als auch in y von höher als Θ-tem Grade sind,und $*$ komme in $P(*,y)$ nur unter Integralen vor. Dann hat $A(*,y)=T(*,y)+P(*,y)$ die eben behandelten Eigenschaften. Es gibt daher Zahlen $e>0$ und $d>0$, so daß die Integralpotenzreihen-Gleichung $A(x,y)-x=\Theta$ für jedes y aus

$J=(y,\|y\|<e)$ Lösungen in $G=(x,\|x\|<d)$ besitzt. Sei $X_0=(\Theta)$, für ein beliebiges y_1 aus G X_1 die Fixpunktmenge des Operators $A(*,y_1)$ und X die Menge aller Fixpunkte des Operators $A(*,y)$, wenn y aus J gewählt wird. Dann ist X ein stetiger Zweig, der X_0 mit X_1 verbindet.

L E B E N S L A U F

Am 2.10.1943 wurde ich als Sohn des Dipl.-Ing. Rudolf und Frau Hildegard Baierl in Reichenberg geboren, besuchte 1950-63 Grundschule und Gym - nasium in Mülheim/Ruhr und legte dort 1963 mein Abitur ab. Von Mai 1963 bis 1968 studierte ich Mathematik an der FU Berlin, besuchte Seminare der Herren Prof.Pachale,Prof.Dinghas,Prof.Grote-meyer ,Dr.Tippe und erwarb nach Betreuung durch Herrn Dr.Tippe das Diplom in Mathematik mit dem Nebenfach Physik.Juli 1968.
1965 Heirat, eine Tochter. Seit 1965 Werkstuden-tentätigkeit bei der IBM, seit April 1968 Unter-richtstätigkeit an der Ingenieurschule Gauß im Fach Mathematik.
September 1969 schrieb ich unter Herrn Prof.Pachale die vorliegende Arbeit.

Berlin, den 20.3.1970
Rudolf Herbert Baierl

Druck: Dissertationsdruckstelle, 1 Berlin 33